

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 004

Beschouwingen over een formule voor $e^{-tx} \log x$

C.G. Lekkerkerker



1951

Beschouwingen over een formule voor $e^{-tx} \log x$
door

C.G. Lekkerkerker

Als inleiding op de hier besproken kwesties zie men ook rapport Z.W. 1951-003. In §1 wordt een tot in details uitgevoerde rechtvaardiging gegeven van een formele herleiding die Prof. Van Dantzig gaf; we bewijzen zo:

$$(1) \quad e^{-x} \log x = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-x \log \omega} \int_0^1 e^{-\omega v} \log v \, dv \, d\omega, \quad \operatorname{Re} x > 0,$$

waarbij de integratieweg C voor ω een langs de negatief - reële as uitgestrekte lus is, die éénmaal in positieve zin om de oorsprong loopt. In de §§2 - 4 worden verschillende beschouwingen van Prof. Van Dantzig in zo eenvoudig mogelijke vorm weergegeven. Hierbij wordt in §2 een ander bewijs voor (1) gegeven. In §3 wordt aangegeven, hoe men, uitgaande van (1), kan geraken tot de formule (9) voor $e^{-tx} \log x$, In §4 worden mogelijke veranderingen van de integratieweg nagegaan; speciaal wordt bewezen, dat juist onder de voorwaarde $0 < \operatorname{Re} x < 1$ de integratie naar ω herleid kan worden tot een langs de positief-reële as van 0 tot ∞ (zonder lus).

Verder wordt aangetoond, dat het rechterlid van (1) geen betekenis heeft, als we x zuiver imaginair kiezen (§5). Daarmee is dan bewezen, dat de voorwaarde $\operatorname{Re} x > 0$, waaronder (1) afgeleid wordt, niet verruimd kan worden. Tenslotte worden nog enige eigenschappen van de integraal in het rechterlid van (1) besproken (§6).

§1. Zijn a en b complexe getallen met $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$, dan geldt:

$$\int_0^\infty e^{-a u} u^{b-1} du = a^{-b} \Gamma(b).$$

Tevens geldt:

$$\frac{1}{\Gamma(b)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \zeta^{-b} e^\zeta d\zeta.$$

In deze formules wordt met a^{-b} en ζ^{-b} de hoofdwaaarde bedoeld; speciaal is voor ζ op de negatief-reële as $\zeta^{-b} = e^{-b(\log|\zeta| - \pi i)}$ resp. $= e^{-b(\log|\zeta| + \pi i)}$, al naar gelang het gedeelte van de lus, waartoe ζ behoort.

Door combinatie van de genoemde formules volgt:

$$a^{-b} = \int_0^{\infty} e^{-au} u^{b-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \xi^{-b} e^{\xi} d\xi du = a^{-b}.$$

Vullen we in $a = b = x$, dan krijgen we:

$$(2) \quad x^{-x} = \int_0^{\infty} e^{-xu} u^{x-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \xi^{-x} e^{\xi} d\xi du.$$

We schrijven voortaan liever de complexe machten als e - machten.

Dan luidt (2):

$$(2a) \quad e^{-x} \log x = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \int_C e^{-xu} + (x-1) \log u - x \log \xi + \xi d\xi du \quad (\text{Re } x > 0).$$

In de binnenste integraal mogen we voor $0 < u < \infty$ de substitutie $\xi = \omega u e^{-u}$ toepassen, omdat dan $u e^{-u}$ een positief getal is, dat niet van ξ afhangt. We mogen hierbij de integratieweg voor elke u zodanig veranderen, dat steeds de variabele ω dezelfde lus C doorloopt. Dit levert:

$$\begin{aligned} & \int_C e^{-xu} + (x-1) \log u - x \log \xi + \xi d\xi \\ &= \int_C e^{-xu} + (x-1) \log u - x \log \omega - x \log u + xu + \omega u e^{-u} \cdot u e^{-u} d\omega \\ &= \int_C e^{-u} - x \log \omega + \omega u e^{-u} d\omega. \end{aligned}$$

Krachtens de geldigheid van (2a) mogen we integreren naar u van 0 tot ∞ . Dus is bewezen voor $\text{Re } x > 0$:

$$(3) \quad e^{-x} \log x = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \int_C e^{-u} - x \log \omega + \omega u e^{-u} d\omega du.$$

We willen nu formule (3) herleiden tot formule (1). We mogen de integratieweg C in de buurt van de oorsprong zodanig veranderen, dat ω daarbij eerst de negatief-reële as van $-\infty$ tot -1 , daarna de eenheidscirkel in positieve zin, en tenslotte de negatief-reële as van -1 tot $-\infty$ doorloopt. Dan is steeds $|\omega| \geq 1$, $\text{Re } \omega \leq 1$, $|\arg \omega| \leq \pi$. Verder merken we op, dat $0 \leq u e^{-u} \leq 1$ is.

Ons doel is nu te bewijzen, dat in (3) de integraties verwisseld mogen worden. Daartoe onderstellen we eerst: $\text{Re } x > 1$.

Zij $x = r + i s$, r en s reëel. Dan zijn r en s twee getallen, die niet van de integratievariabelen ω en u afhangen, terwijl $r > 1$ is. De integrand in het rechterlid van (3) is gemakkelijk te majoreren:

$$\begin{aligned} e^{-u-x} \log \omega + \omega u e^{-u} &= O(e^{-u} - r \log |\omega| + s \arg \omega + u e^{-u} \text{Re } \omega) \\ &= O(e^{-u} \cdot |\omega|^{-r} \cdot e^{+\pi \cdot |s| + 1}) = O(e^{-u} \cdot |\omega|^{-r}). \end{aligned}$$

De laatste ongelijkheid is een voldoende rechtvaardiging voor de verwisseling van de integraties in (3), want

$$\int_0^{\infty} \int_C e^{-u} |\omega|^{-r} d\omega du = \int_0^{\infty} e^{-u} du \cdot \int_C |\omega|^{-r} d\omega$$

bestaat wegens $r > 1$. Er geldt dus voor $\text{Re } x > 1$:

$$(4) \quad e^{-x \log x} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-x \log \omega} \int_0^{\infty} e^{-u + \omega u e^{-u}} du d\omega.$$

Door de substitutie $e^{-u} = v$ gaat dit over in (1).

Om nu de geldigheid van (4), en daarmee ook van (1), te bewijzen in het gebied $\text{Re } x > 0$, passen we het principe van de analytische voortzetting toe. Daartoe is, als we even stellen

$$\rho(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-u} + \omega u e^{-u} du,$$

voldoende aan te tonen, dat

$$(5) \quad \int_0^1 \rho(\omega) e^{-x \log \omega} d\omega$$

bestaat en analytisch is, als functie van x , voor $\operatorname{Re} x > 0$.

Eerst tonen we aan dat geldt:

$$(6) \quad \rho(\omega) = O((- \operatorname{Re} \omega)^{-1}),$$

waarbij

$$(7) \quad \rho(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-u} + \omega u e^{-u} du = \int_0^1 e^{-\omega v \log v} dv.$$

We merken op, dat $v \log v$ in het interval $0 < v < 1$ negatief is; het is dus niet bevreemdend dat $\rho(\omega)$ tot nul afneemt voor $-\operatorname{Re} \omega \rightarrow +\infty$.

We hebben, als $\operatorname{Re} \omega < 0$:

$$\begin{aligned} |\rho(\omega)| &= \int_0^1 e^{-\operatorname{Re} \omega v \log v} dv \\ &= \int_0^{e^{-1}} e^{-\operatorname{Re} \omega v \log v} dv + \int_{e^{-1}}^1 e^{-\operatorname{Re} \omega v \log v} dv \\ &< \int_0^{e^{-1}} e^{-\operatorname{Re} \omega v \log e^{-1}} dv + \int_{e^{-1}}^1 e^{-\operatorname{Re} \omega e^{-1} \log v} dv \\ &< \int_0^{\infty} e^{v \operatorname{Re} \omega} dv + \int_0^1 v^{-e^{-1} \operatorname{Re} \omega} dv \\ &= \frac{1}{-\operatorname{Re} \omega} + \frac{1}{-e^{-1} \operatorname{Re} \omega + 1} = O((- \operatorname{Re} \omega)^{-1}). \end{aligned}$$

We splitsen nu de integraal (5) in drie stukken:

$$\int_0^1 \rho(\omega) e^{-x(\log |\omega| - \pi i)} d\omega + \oint_{\text{eenheidscirkel}} \rho(\omega) e^{-x \log \omega} d\omega + \int_1^{\infty} \rho(\omega) e^{-x(\log |\omega| + \pi i)} d\omega = I_1 + I_2 + I_3.$$

De integraal I_2 is analytisch in x voor $\operatorname{Re} x > 0$, zijnde de integraal van een analytische functie over een vast vak van eindige lengte. I_1 is de limiet voor $R \rightarrow \infty$ van de integraal:

$$F(R, x) = \int_{-R}^{-1} \rho(\omega) e^{-x(\log |\omega| - \pi i)} d\omega \quad (R > 1).$$

Deze limiet bestaat, en wel is de nadering uniform, omdat volgens (6) geldt:

$$\rho(\omega) e^{-x(\log |\omega| - \pi i)} = O(|\omega|^{-1} e^{-\operatorname{Re} x \log |\omega|}).$$

Verder is $F(R, x)$ een analytische functie van x . Volgens bekende stellingen uit de functietheorie (zie Titchmarsh, Theory of Functions, 283 en 2.84) is dan $I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} F(R, x)$ een analytische functie van x . Alles voor $\operatorname{Re} x > 0$. Evenzo is I_3 analytisch.

Tenslotte volgt dan uit de geldigheid van (4) voor $\operatorname{Re} x > 1$ die voor $\operatorname{Re} x > 0$, omdat beide leden analytisch zijn.

§ 2. Nu volgt een ander bewijs van (1). En wel voor het geval x reëel, $0 < x < 1$. Dit is voldoende voor een volledig bewijs, als men, evenals in § 1, het principe van de analytische voortzetting toepast.

We gaan uit van:

$$\begin{aligned}\Gamma(x) \Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin \pi x}, \\ \Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^u} + x u \, du \\ \Gamma(1-x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-x} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^v} + (1-x)v \, dv.\end{aligned}$$

De integralen zijn absoluut convergent. Dus

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sin \pi x} &= \iint_{-\infty}^{\infty} e^v + x u - x v - e^u - e^v \, du \, dv, \\ e^{-x \log x} &= \frac{\sin \pi x}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{R(\varepsilon)} e^v - x(v + \log x - u) - e^u - e^v \, du \, dv.\end{aligned}$$

Hierbij duidt $R(\varepsilon)$ een of andere rechthoek $\{a < u < b, c < v < d\}$ in het u, v -vlak aan met de eigenschap, dat bij weglaten van het limietteken de absolute fout hoogstens ε is.

We voeren de volgende transformatie uit:

$$\begin{aligned}u &= y + \log x, \quad v = z + y - e^y. \\ \text{Dan is } \frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)} &= 1, \quad v + \log x - u = z - e^y, \quad e^u = x e^y. \\ \text{Dus is } \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} &= \frac{\sin \pi x}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{G'(\varepsilon)} e^{z+y} - e^y - xz - e^{z+y} - e^y \, dy \, dz,\end{aligned}$$

waarbij $G'(\varepsilon)$ het éénéénduidige beeld is van de rechthoek

$R(\varepsilon)$ in het vlak yz . In bovenstaande integraal,

waar de integrand weer absoluut integreerbaar is over het hele y, z -vlak, mogen we zonder de absolute afwijking van de limiet

te vergroten, het gebied $G'(\varepsilon)$ vervangen door een omvattende

rechthoek $R'(\varepsilon) = \{a' < y < b', c' < z < d'\}$, waarbij te nemen is

$a' = a - \log x$, $b' = b - \log x$, $c' = c - \max(y - e^y) = c + 1$,

$d' = d + \max(e^y - y) = d + \max(e^{a'} - a', e^{b'} - b')$.

Dus is

$$\begin{aligned}e^{-x \log x} &= \frac{\sin \pi x}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{R'(\varepsilon)} e^{z+y} - e^y - xz - e^{z+y} - e^y \, dy \, dz \\ &= \frac{\sin \pi x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xz} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z+y} - e^y - e^{z+y} - e^y \, dy \, dz \\ &= \frac{\sin \pi x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xz} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^y} - e^{z+y} - e^y \, d(e^y) d(e^z) \\ &= \frac{\sin \pi x}{\pi} \int_0^\infty w^{-x} \rho(-w) \, dw\end{aligned}$$

(8)

met

$$\begin{aligned}\rho(-w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^y} - w e^{y-e^y} \, d(e^y) \\ &= \int_0^\infty e^{-t} - w t e^{-t} \, dt = \int_0^1 e^{wx \log x} \, dx.\end{aligned}$$

In § 4 zal blijken, dat de integraal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C w^{-x} \rho(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-x \log w} \rho(w) dw$$

zodanig vervormd kan worden, dat het rechterlid van (8) ontstaat.

§ 3. Zij $\operatorname{Re} t x > 0$. Op de volgende wijze kunnen we onmiddellijk uit (1) een formule voor $e^{-t x \log x}$ afleiden:

$$e^{-tx \log x} = e^{-tx \log t x} \cdot e^{tx \log t}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} e^{tx \log t} \int_C e^{-tx \log \omega} \int_0^1 e^{-\omega v \log v} dv d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} e^{tx \log t} \int_{C_t} e^{-tx \log \xi} \int_0^1 e^{-\xi t v \log v} t dv d\xi$$

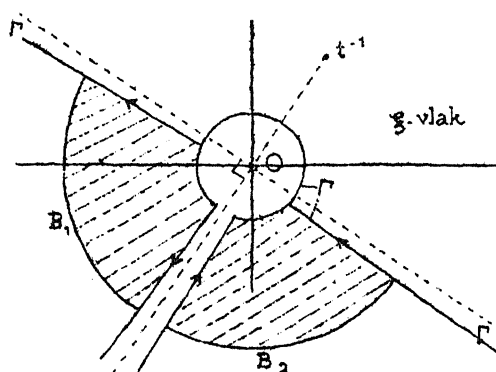
$$= \frac{t}{2\pi i} \int_{C_t} e^{-tx \log \xi} \int_0^1 e^{-\xi t v \log v} dv d\xi \quad (\operatorname{Re} t x > 0),$$

(9)

waarbij de integratieweg C_t uit de integratieweg C ontstaat door vermenigvuldiging met t^{-1} .

Indien x positief is, zijn we gebonden aan de voorwaarde $\operatorname{Re} t > 0$. Deze voorwaarde is equivalent met de voorwaarde $\operatorname{Re} x > 0$, waaronder formule (1) geldig is.

§ 4. We willen nu bewijzen, dat men in formule (9) voor de integratieweg C_t een "willekeurige" kromme Γ mag nemen, die in twee verschillende richtingen naar ∞ gaat, waarbij de argumenten dier richtingen minder dan $\pi/2$ verschillen met $\arg(-t^{-1})$, terwijl de punten 0 en t^{-1} aan weerskanten van Γ liggen.



Zij $\arg t = \tau$, $\arg \xi = \varphi$. Dan is $\arg(-t^{-1}) = \pi - \tau$ en er is dus een getal $\delta > 0$, zodat op zekere afstand van de oorsprong geldt:

$$|\arg(-\xi t)| = |\varphi - \pi + \tau| = |\varphi - (\pi - \tau)| \leq \pi/2 - \delta.$$

Hieruit volgt, dat dan $-\operatorname{Re} \xi t$ positief is, en wel is

$$-\operatorname{Re} \xi t = |\xi t| \cos \arg(-\xi t) \geq |\xi t| \sin \delta;$$

dus geldt wegens (6): $\rho(\xi t) = O(|\xi t|^{-1})$,

als ξ op Γ ligt of aan dezelfde kant van Γ als de oorsprong.

Laten B_1 en B_2 bogen zijn van de cirkel $|\xi| = R > 0$, die een punt van C_t met een punt van Γ verbinden, zoals in de figuur getekend is. We kunnen nu zeggen dat de integraal van de functie $e^{-tx \log \xi} \rho(\xi t)$ langs Γ bestaat en gelijk is aan die langs C_t , omdat de integralen langs B_1 en B_2 tot nul naderen voor $R \rightarrow \infty$.

de genoemde functie voldoet daar aan de schatting:

$$e^{-tx \log \xi} \rho(\xi t) = O(|\xi|^{-\operatorname{Re} tx}) \cdot O(|\xi t|^{-1}) = O(|\xi|^{-1-\operatorname{Re} tx})$$

- en de genoemde functie analytisch is in de in de figuur gearceerde gebieden.

We vragen ons nu af, onder welke voorwaarden de lus in de integratieweg verwijderd kan worden. We merken daartoe allereerst op, dat de functie $\rho(\omega)$ uit (7) een gehele functie van ω is met $\rho(0) = 1$. In de integraal (9) langs C_t nadert dus de bijdrage van de lus bij samentrekken juist dan tot nul, als geldt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi|=\epsilon} e^{-tx \log \xi} d\xi = 0.$$

Hiervoor is nodig en voldoende: $\operatorname{Re} t x < 1$.

En we kunnen dan de integraal op de volgende manier nog verder herleiden.

We laten C_t langs de halfrechte door 0 en $-t^{-1}$ vallen. We bedenken dat het argument van ξ gelijk is aan $\arg t^{-1} - \pi i$ resp. $\arg t^{-1} + \pi i$ en voeren de substitutie $\xi = -w$ uit:

$$\begin{aligned} \int_{C_t} e^{-tx \log \xi} \rho(\xi t) d\xi &= \int_{t^{-1}\infty}^0 e^{-tx(\log w + \pi i)} \rho(-wt) d(-w) + \int_0^{t^{-1}\infty} e^{-tx(\log w + \pi i)} \rho(-wi) d(-w) \\ &= (e^{\pi i t x} - e^{-\pi i t x}) \int_0^{t^{-1}\infty} e^{-tx \log w} \rho(-wt) dw. \end{aligned}$$

Het resultaat is dus:

$$0) \quad e^{-tx \log x} = \frac{t \sin \pi t x}{\pi} \int_0^{t^{-1}\infty} e^{-tx \log w} \rho(-wt) dw \quad (0 < \operatorname{Re} t x < 1).$$

Uit (10) ontstaat formule (8) door $t = 1$ te nemen.

§ 5. In deze paragraaf zullen we aantonen, dat formule (1) zijn geldigheid verliest voor $\operatorname{Re} x = 0$. Voor het gebied van x , waar formule (1) bewezen is, is de overgang naar de rand dus zeker niet geoorloofd. Een aequivalente uitspraak is, dat men in formule (9) $\operatorname{Re} t x$ niet naar nul mag laten gaan.

De te volgen methode is deze. We kunnen alvast $\operatorname{Re} x < 1$ nemen, en dan i.p.v. formule (1), formule (8) bekijken. We stellen $x = is$ en zullen aantonen dat de integraal

$$1) \quad I_N = \int_0^N e^{-is \log w} \rho(-w) dw \quad (N > 0)$$

voor reële s geen limiet heeft voor $N \rightarrow \infty$.

Allereerst ontwikkelen we $\rho(-w)$ in een reeks:

$$\rho(-w) = \int_0^1 e^{wv \log v} dv = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1} v^{n-1} \log^{n-1} v}{(n-1)!} dv = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{w^{n-1} v^{n-1} \log^{n-1} v}{(n-1)!} dv$$

$$2) \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 e^{(n-1)z} (-z)^{n-1} d(e^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-nz} (-z)^{n-1} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-w)^{n-1}}{n^n}.$$

Deze reeks convergeert absoluut - uniform voor $0 \leq w \leq N$. Dus is $(1 > \operatorname{Re} x \geq 0)$:

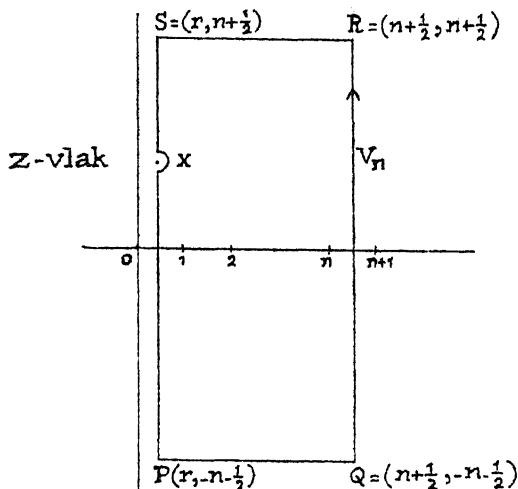
$$I_N = \int_0^N w^{-x} \rho(w) dw = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} w^{n-1-x} dx \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} \frac{N^{n-x}}{n-x} = -N^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-N)^n}{n^n(n-x)}.$$

De reeks in het laatste lid kunnen we m.b.v. de residuenstelling als een integraal schrijven. We voeren daartoe in de functie

(13)
$$g(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{N^z}{z^z(z-x)} \quad (\text{hoofdwaarde voor } N^z \text{ en } z^z).$$

Deze functie heeft in het rechterhalfvlak $\operatorname{Re} z \geq 0$, afgezien van het punt $z = 0$ en het punt $z = x$, alleen singuliere punten, en wel enkelvoudige polen met residu $\frac{(-N)^n}{n^n(n-x)}$ in de

punten $z = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Voeren we, zoals in de figuur aangegeven, de gesloten kromme V_n in met twee verticale lijn-



stukken door de punten $z = r = \operatorname{Re} x$ en $z = n + \frac{1}{2}$, met een instulping bij $z = x$, en eventueel ook bij $z = 0$, en met twee horizontale lijnstukken ter hoogte $n + \frac{1}{2}$, dan geldt:

$$(14) \sum_{v=1}^n \frac{(-N)^v}{v^v(v-x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{V_n} g(z) dz.$$

Nu voldoet de functie $g(z)$ uit (13);

als we stellen $z = u + i v = \operatorname{Re}^{i\alpha}$

(u, v, R, α reëel), aan de volgende schat-

ting langs P Q R S:

$$g(z) = O(e^{-\pi|v|} N^u e^{-u \log R + \frac{\pi}{2}|v|} \cdot \frac{1}{|z-x|}) \\ = O(e^{-\frac{\pi}{2}|v|} \left(\frac{N}{R}\right)^u).$$

En hieruit volgt:

$$\int_Q^R g(z) dz = O\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}|v|} \left(\frac{N}{n+\frac{1}{2}}\right)^u dv\right) = O\left(\frac{N^u}{n^u}\right),$$

$$\int_P^Q g(z) dz = O\left(\int_0^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}n} \left(\frac{N}{n+\frac{1}{2}}\right)^u du\right) \\ = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}n} \int_0^{n+\frac{1}{2}} e^{u \log \frac{N}{n}} du\right) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}n} \left(\frac{N}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\log N - \log n}\right),$$

en dezelfde schatting voor $\int_S^R g(z) dz$.

Dus heeft het rechterlid van (14) voor elke N een limiet voor $n \rightarrow \infty$, en wel krijgen we uit (14) door limietovergang:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-N)^n}{n^n(n-x)} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{V_n} g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} g(z) dz,$$

ofwel

$$I_N = \frac{N^{-x}}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi z} \frac{N^z}{z^z(z-x)} dz,$$

dus, als we $x = i s$, $z = i y$ substitueren, in het geval van reële s :

$$(15) \quad I_N = \frac{N^{-is}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\sin \pi i y} \frac{e^{iy \log N - iy \log y + \frac{\pi}{2} y}}{y-s} dy.$$

In de integrand (15) wordt geïntegreerd langs de reële as, waarbij de kritieke punten $y = 0$ en $y = s$ door instulpingen naar beneden vermeden dienen te worden.

De situatie is nu deze, dat we de functie I_N , over wier gedrag voor $N \rightarrow \infty$ we iets te weten willen komen, geschreven hebben als de integraal in het rechterlid van (15). Dat die integraal bestaat, volgt uit onze afleiding, maar is ook direct in te zien, omdat de integrand geschreven kan worden als $O(e^{-\frac{\pi}{2}|y|})$. Dit laatste hangt niet van N af en is integreerbaar over $(-\infty, \infty)$.

We splitsen nu de integraal in (15) in vier stukken, en wel (als we $s > 0$ veronderstellen, wat niet essentieel is):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-U} + \int_{-U}^{+\frac{s}{2}} + \int_{+\frac{s}{2}}^V + \int_V^{+\infty} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4.$$

Allereerst kunnen, gegeven $\varepsilon > 0$, krachtens een opmerking in de laatste alinea U en V zodanig gekozen worden, dat geldt:

$$U > 0, V > s, |K_1| < \varepsilon, |K_4| < \varepsilon.$$

Krachtens het gedrag van $e^{-i y \log y}$ in de oorsprong kunnen we K_2 schrijven als

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_{-U}^{+\frac{s}{2}} \frac{\pi}{\sin \pi i y} \frac{e^{iy \log N - iy \log y + \frac{\pi}{2} y}}{y-s} dy \\ &= \frac{1}{is} \int_{-U}^{+\frac{s}{2}} e^{iy \log N} \left(\frac{1}{y} + F_1(y) \right) dy, \end{aligned}$$

waarbij de functie $F_1(y)$ weliswaar niet analytisch, en zelfs niet begrensd is in het integratievak, maar wel integreerbaar. En dan is volgens een stelling van Riemann - Lebesgue (zie Titchmarsh, Theory of Functions, 13.21)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-U}^{+\frac{s}{2}} e^{iy \log N} F_1(y) dy = 0.$$

Verder is (zie Doetsch, Laplace - Transf., p.105):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-U}^{+\frac{s}{2}} \frac{e^{iy \log N}}{y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iy}}{y} dy = 2\pi i.$$

Men bedenke bij dit laatste dat men de instulping in de integratieweg beneden de oorsprong elke gewenste afmeting kan laten aannemen.

Het resultaat kunnen we zo neerschrijven:

$$K_2 = \frac{-2\pi}{s} + o(1).$$

Op dezelfde manier vinden we:

$$K_3 = \int_{+\frac{s}{2}}^V \frac{\pi}{\sin \pi i y} \frac{e^{iy \log N - iy \log y + \frac{\pi}{2} y}}{y-s} dy$$

$$= \int_{s/2}^V e^{i(y-s)\log N} \left(\frac{\pi}{(y-s)\sin\pi s} e^{-is\log s + \frac{\pi}{2}s + is\log N} + F_2(y) \right) dy,$$

waarbij $F_2(y)$ een integreerbare functie van y is, dus weer

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{s/2}^V e^{i(y-s)\log N} F_2(y) dy &= 0 \\ \text{en} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{s/2}^V \frac{\pi e^{i(y-s)\log N}}{(y-s)\sin\pi s} e^{-is\log s + \frac{\pi}{2}s} dy \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi s} e^{-is\log s + \frac{\pi}{2}s} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(y-s)}}{y-s} dy = 2\pi i \frac{\pi}{\sin\pi s} e^{-is\log s + \frac{\pi}{2}s}. \end{aligned}$$

Het resultaat kunnen we nu zo opschrijven:

$$K_3 = 2\pi i \frac{\pi}{\sin\pi s} e^{-is\log s + \frac{\pi}{2}s + is\log N} + o(1).$$

Door optelling ontstaat:

$$\begin{aligned} (16) \quad I_N &= \frac{N^{-is}}{2\pi i} (K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi s} e^{-is\log s + \frac{\pi}{2}s} + \frac{i}{s} e^{-is\log N} + o(1) \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi s} e^{-is\log(is)} + \frac{i}{s} e^{-is\log N} + o(1). \end{aligned}$$

Formule (16) demonstreert duidelijk onze bewering, dat I_N geen limiet heeft voor $N \rightarrow \infty$; er is een schommelende term; de eerste term is juist het bedrag, waartoe de waarde van de integraal in het rechterlid van (8) nadert, als we x tot is laten naderen.

§ 6. In deze laatste paragraaf willen we enige eigenschappen noemen, die uit formule (1) verkregen worden door partiële integratie.

We kunnen herleiden ($0 < \operatorname{Re} x < 1$)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C w^{-x} \rho(-w) dw = \frac{1}{2\pi i} \frac{w^{1-x}}{1-x} \rho(-w) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w^{1-x}}{1-x} \int_0^1 y \log y e^{wy \log y} dy dw,$$

dus is, omdat krachtens (6) het partiële integratieresultaat wegvalt:

$$(17) \quad (x-1)e^{-x\log x} = \frac{1}{2\pi i} \int_C w^{-x} \int_0^1 wy \log y e^{wy \log y} dy dw.$$

Formule (17) zegt, dat bij vermenigvuldiging van de integrand $e^w y \log y$ met $w y \log y$ het resultaat met $x-1$ vermenigvuldigd.

I.p.v. $\rho(-w)$ kunnen we ook $w\rho(-w)$ differentieren. Er geldt (zie ook de afleiding van (12)):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dw} (w \rho(-w)) &= \int_0^1 (1 + wy \log y) e^{wy \log y} dy \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{w^{n-1} y^{n-1} \log^{n-1} y}{(n-1)!} dy + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{w^n y^n \log^n y}{(n-1)!} dy \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-w)^{n-1}}{n^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n w^n}{(n-1)!} \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} \\
 &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-w)^{n-1}}{n^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-w)^{n-1} (n-1)}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-w)^{n-1}}{n^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Men had dit resultaat ook door differentieren van de reeks voor $w \rho(-w)$ kunnen verkrijgen. Het resultaat is in het volgend opzicht interessant. We kunnen herleiden ($\text{Re } x > 0$):

$$\begin{aligned}
 e^{-x \log x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C w^{-x-1} \cdot w \rho(-w) dw \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{w^{-x}}{-x} w \rho(-w) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w^{-x}}{-x} \int_0^1 (1 + wy \log y) e^{wy \log y} dy dw,
 \end{aligned}$$

dus is

$$x e^{-x \log x} = e^{-(x-1) \log x}$$

$$(18) \quad = \frac{1}{2\pi i} \int_C w^{-x} \int_0^1 (1 + wy \log y) e^{wy \log y} dy dw.$$

We kunnen nu in het rechterlid van (18) de gevonden reeks invullen en dezelfde beschouwingen houden als in § 5 voor formule (1). Het enige verschil is, dat nu in de noemer van de reeks een factor n minder staat, zodat ook de in te voeren functie $g(z)$ een factor z in de noemer minder krijgt. We kunnen weer (14) afleiden. En dan volgt (15) met een extra factor y in de teller; dit heeft tengevolge dat in de integraal in (15) het punt $y = 0$ ons geen parten speelt. Let men op de afleiding van (16), dan ziet men dat de tweede term in het rechterlid van (16) komt te vervallen. Maar dat is buitengewoon fraai: nu heeft I_N een limiet voor $N \rightarrow \infty$. Hiermede is bewezen, dat men in (18) mag stellen $x = 1 + s$ met s reëel en niet gelijk aan nul; er is niet alleen bewezen dat (18) convergeert, maar dankzij (16) is meteen het gewenste antwoord verkregen; we voeren dit laatste nu niet verder uit.

Een derde mogelijkheid van partiële integratie is deze, dat men daarbij de factor $\rho(-w)$ integreert. Dit levert ons:

$$\int_0^w \rho(-w) dw = \int_0^w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-w)^{n-1}}{n^n} dw = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} w^n}{n^{n+1}}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-w)^n}{n!} \frac{n!}{n^{n+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-w)^n}{n!} \int_0^1 y^{n-1} (-\log y)^n dy$$

$$= - \int_0^1 \frac{e^{wy \log y} - 1}{y} dy ,$$

dus

$$e^{-(x-1)\log(x-1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C w^{1-x} \rho(w) dw = \frac{1-x}{2\pi i} \int_C w^{-x} \int_0^1 \frac{e^{wy \log y} - 1}{y} dy ,$$

of

$$e^{-x \log(x-1)} = \frac{-1}{2\pi i} \int_C w^{-x} \int_0^1 \frac{e^{wy \log y} - 1}{y} dy .$$